**Maestría en Econometría - UTDT**

**Examen Final - Matemática**

**Ejercicio 1.**

*Clasificar las siguientes formas cuadráticas, según los valores del parámetro .*

*Q (x, y, z)= + 9 + + 2xy + xz + yz.*

En primer lugar, para clasificar la forma cuadrática Q: para los distintos valores de , es necesario encontrar la matriz asociada a Q (matriz A). En términos generales, la forma cuadrática Q puede ser escrita en términos de esta matriz A como:

Q (x, y, z)= A .

En particular, se tiene:

Q (x, y, z)= .

Luego, es necesario encontrar los menores principales dominantes de la matriz A:

= 1.

= 1 \* 9 -

= 9 - .

= 1 (9 \* 1 - ) - ( \* 1 - ) + ( \* - 9 \* )

= 1 (9 - ) - ( - ) + ( - )

= 1 \* - + + -

= - + + .

Se analiza cuándo es = 0:

= 1 0.

Se analiza cuándo es = 0:

= 0

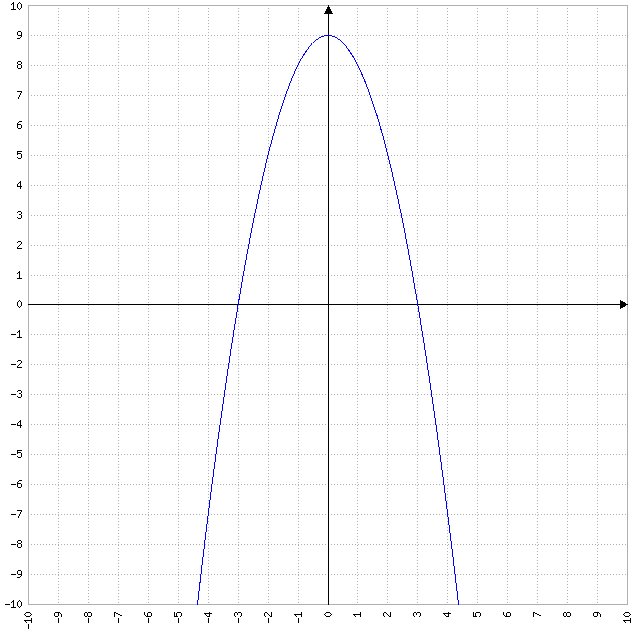
9 - = 0

= 9

=

= 3

= 3.



Se analiza cuándo es = 0:

= 0

- + + = 0

(-1) ( - - )= 0

- - =

- - = 0.

, =

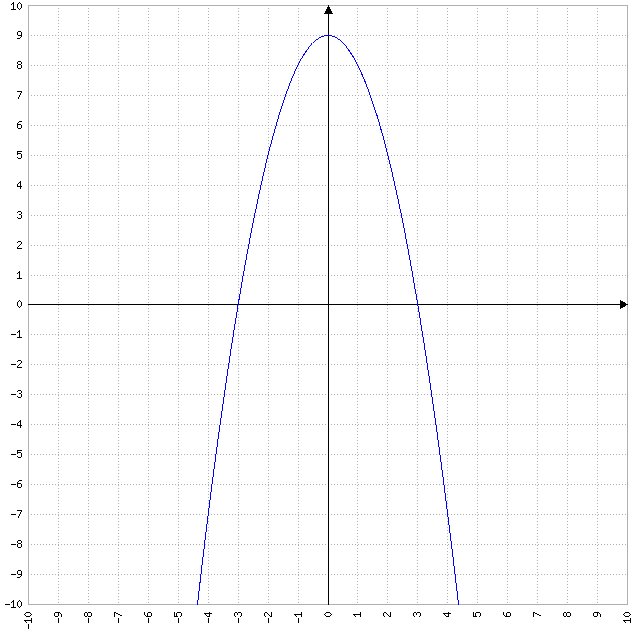
, =

, =

, =

= = + = 2,8117.

= = - = -2,3117.



Para analizar si la forma cuadrática Q es definida positiva, definida negativa o indefinida, se analizan, en primer lugar, los casos donde 0 (es decir, cuando 2,8117 y -2,3117):

* Si -3, 0, 0 y 0.
* Si = -3, 0, = 0 y 0.
* Si -3 -2,3117, 0, 0 y 0.
* Si -2,3117 2,8117, 0, 0 y 0.
* Si 2,8117 3, 0, 0 y 0.
* Si = 3, 0, = 0 y 0.
* Si 3, 0, 0 y 0.

Para analizar si la forma cuadrática Q es semidefinida positiva, semidefinida negativa o indefinida, se analizan, en segundo lugar, los casos donde = 0 (es decir, cuando = 2,8117 y = -2,3117):

* Si = -2,3117, 0, 0.
* Si = 2,8117, 0, 0.

Por lo tanto, la forma cuadrática Q: es:

* definida positiva si -2,3117 2,8117, ya que 0, 0 y 0.
* semidefinida positiva si = -2,3117 o = 2,8117, ya que 0, 0 y = 0.
* indefinida si -2,3117 o 2,8117.

**Ejercicio 2.**

*Considerar la siguiente ecuación en diferencias:*

*- 5 + 4= + 1.*

**(a)** *Hallar todas las soluciones.*

Se parte de saber que la solución general de una ecuación en diferencias son las soluciones de la ecuación homogénea asociada a ésta más la solución particular:

= + .

Siendo así, en primer lugar, se buscan las soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación en diferencias:

- 5 + 4= 0.

Sea = , se tiene:

- 5 + 4= 0

( - 5r + 4)= 0.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan las soluciones de la ecuación homogénea:

, =

, =

, =

, =

= = = 4.

= = = 1.

Entonces, la solución homogénea es la siguiente:

= +

= + \* 1

= + .

En segundo lugar, dado que 1 es raíz (simple) de la ecuación - 5r + 4= 0, se propone la siguiente solución particular:

= + t.

Resolviendo en la ecuación en diferencias, se tiene:

[ + (t + 2)] - 5 [ + (t + 1)] + 4 ( + t)= + 1

( + t + 2) - 5 ( + t + ) + 4 + 4t= + 1

+ t + 2 - 5 - 5t - 5 + 4 + 4t= + 1

- 3 - 5 + 4= + 1

( - 5e + 4) - 3= + 1.

Luego, se tiene que las constantes y , respectivamente, son iguales a:

( - 5e + 4) =

=

= .

-3= 1

=

= .

Entonces, la solución particular es la siguiente:

= - .

Por lo tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es:

= + + - .

**(b)** *Hallar la única solución de la ecuación homogénea asociada que cumple con los datos iniciales = 1 e = 10000.*

En primer lugar, se utilizan los datos iniciales = 1 e = 10000 en la solución general de ecuación en diferencias:

= 1

+ + - = 1

\* 1 + + - 0= 1

+ + = 1

+ = 1 -

= 1 - - . (1)

= 10000

+ + - = 10000

4 + + - = 10000

4 + = 10000 - +

4 + = - . (2)

Luego, reemplazando (1) en (2), se tiene:

4 + 1 - - = -

3= - - 1 +

3= +

=

= + 3333. (3)

Y, por último, reemplazando (3) en (1) o en (2), se tiene:

= 1 - - -

= + -3332. (4’)

4 [ + ] + = -

+ + = -

= - - -

= + -3332. (4’’)

Por lo tanto, la única solución de la ecuación homogénea asociada que cumple con los datos iniciales = 1 e = 10000 es:

= 3333 \* - 3332.

**Ejercicio 3.**

*Sean A, B las siguientes matrices:*

*A= y B= .*

*Hallar, si existen, todos los valores de k para los cuales el sistema:*

*( - ) =*

*admite infinitas soluciones.*

Se sabe que, si det ( - )= 0, el sistema (homogéneo) dado admite infinitas soluciones.

En primer lugar, el sistema (homogéneo) dado se puede reexpresar de la siguiente manera:

(AI - IB) =

(A - B) =

[ - ] =

= .

Luego, se buscan los valores de k para los cuales se anula el determinante de esta matriz:

det ( (A - B) )= 0

det (A - B) = 0 por (\*)

= 0.

(\*) siendo A, B C , det (ABC)= det (A) det (B) det (C).

Entonces, este determinante se anula cuando = 0 o det (A - B)= 0 o = 0, lo cual sucede cuando:

= 0

det (A)=

det (A)= 0

= 0

-{-[(k + 1) - k]} + [(k + 1) k - 1]= 0

-[-(k + 1 - k)] + + k - 1= 0

-(-1) + + k - 1= 0

1 + + k - 1= 0

+ k= 0

k (k + 1)= 0

= 0.

= -1.

det (A - B)= 0

= 0

-(1 - k) (-k - 1)= 0

-(-k - 1 + + k)= 0

-(-1 + )= 0

1 - = 0

= 1

=

= 1

= 1.

= -1.

= 0

det (B)=

det (B)= 0

= 0

(2k - k) + [1 - 2 (-1)]= 0

k + 1 + 2= 0

k + 3= 0

.= -3.

Por lo tanto, los valores de k para los cuales el sistema dado admite infinitas soluciones son 0, -1, 1 y -3.

**Ejercicio 4.**

Sea A=  *, tal que (3, 3, 0) es autovector de A.*

**(a)** *¿Cuál es el valor de a?*

Como se sabe que (3, 3, 0) es autovector de A, se debe cumplir que:

(A - ) =

[ - ] =

[ - ] =

=

=

=

= .

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

.

Resolviendo, se tiene:

12 - 3= 0

3= 12

=

= 4.

-6 + 3a - 3= 0

-6 + 3a - 3 \* 4= 0

-6 + 3a - 12= 0

3a - 18= 0

3a= 18

a=

a= 6.

Por lo tanto, el valor de a es 6.

**(b)** *¿Cuáles son todos los autovalores de A?*

det (A - I)= 0

det ( - )= 0

det ( - )= 0

det ()= 0

= 0

(1 - ) [(3 - ) (6 - ) - 1 (-2)]= 0

(1 - ) (18 - 3 - 6 + + 2)= 0

(1 - ) ( - 9 + 20)= 0.

Entonces, los autovalores son los valores de que anulan el polinomio característico de A:

1 - = 0

= 1.

- 9 + 26= 0.

, =

, =

, =

, =

= = = 5.

= = = 4.

Por lo tanto, los autovalores de A son = 1, = 5 y = 4.

**(c)** *¿Es A inversible?*

A es inversible, ya que det (A)= = 1 \* 5 \* 4= 20 0, porque 0, para i= 1, 2, 3.

**(d)** *¿Es A diagonalizable?*

A es diagonalizable, ya que tiene n (3) autovalores distintos y, por lo tanto, los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable).

**Ejercicio 5.**

*Sea A una matriz en , de la que se sabe que la traza es igual a 11, el det(A)= 36 y el rg(A - 2)= 2. En base a la información suministrada, hallar todos los números reales , , y tales que:*

*+ + A + = .*

Se sabe que tr (A)= 11, det (A)= 36 y rg (A - 2)= 2.

En primer lugar, por teorema de la dimensión, se tiene:

dim (Ker (A - 2)) + dim (Img (A - 2))= dim (A - 2)

dim (Ker (A - 2)) + rg (A - 2)= dim (A - 2)

dim (Ker (A - 2)) + 2= 3

dim (Ker (A - 2))= 3 - 2

dim (Ker (A - 2))= 1.

Luego, existe un vector v tal que (A - 2) v= 0, por lo que 2 es autovalor de A.

En segundo lugar, se tiene:

tr (A)= + +

11= 2 + +

+ = 11 - 2

+ = 9

= 9 - . (1)

En tercer lugar, se tiene:

det (A)=

36= 2

=

= 18. (2)

Luego, reemplazando (1) en (2), se tiene:

(9 - )= 18

9 - = 18

- 9 + 18= 0.

, =

, =

, =

, =

= = = 6.

= = = 3.

Entonces, A es diagonalizable, ya que tiene n (3) autovalores distintos (= 2, = 6 y = 3) y, por lo tanto, los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable).

Siendo así, la igualdad dada se puede expresar de la siguiente manera:

+ + A + =

+ + P + P= por (\*)

P + P + PD + P= por (\*\*)

P ( + + D + ) =

P ( + + D + ) P= P por (\*\*\*)

( + + D + ) =

+ + D + = .

(\*) = P.

(\*\*) = P.

(\*\*\*) pre-multiplicando por y pos-multiplicando por P, a ambos lados de la igualdad.

Reemplazando D por la matriz diagonal correspondiente, se tiene:

+ + + =

+ + + =

+ + + =

= .

Luego, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

.

Resolviendo (se utiliza [Symbolab](https://es.symbolab.com/solver/linear-algebra-calculator/%5Cbegin%7Bpmatrix%7D8a%2B4b%2B2c%2Bd%260%260%5C%5C%200%26216a%2B36b%2B6c%2Bd%260%5C%5C%200%260%2627a%2B9b%2B3c%2Bd%5Cend%7Bpmatrix%7D%3D%5Cbegin%7Bpmatrix%7D0%260%260%5C%5C%200%260%260%5C%5C%200%260%260%5Cend%7Bpmatrix%7D?or=input)), se tiene:

= .

= .

= -.

Por lo tanto, los números reales , , y que cumplen con la igualdad dada son , , y -, respectivamente.